

Kapitel 1

1.3

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 2 \cdot 1} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.4 a)

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

b)

$$XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$AXB = I \Leftrightarrow X = A^{-1}IB^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

1.6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Detta skulle betyda att $1 = 2b + 4d = 2(b + 2d) = 2 \cdot 0 = 0$ vilket är orimligt dvs matrisen är inte inverterbar.

1.7

$$(A + B)(A - B) = A^2 + BA - AB - B^2 \neq A^2 - B^2$$

1.8

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \text{ endast då } BA = AB$$

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bv \\ cx + dz & cy + dv \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + yc & bx + dy \\ az + cv & bz + dv \end{bmatrix}$$

Konjugatregeln gäller inte generellt för matriser.

Kapitel 2

2.1 a)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{bmatrix} \text{ dvs } (2 \times 2) - \text{matris}$$

b)

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \text{ dvs skalär}$$

c)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{bmatrix} \text{ kan INTE multipliceras}$$

d)

$$(4 \times 4)(4 \times 5) = (4 \times 5)$$

2.2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 15 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 1 & (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) & (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 & 16 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.4 Då $B = A^{-1}$ fås direkt att:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 + 32 + 27 \\ 13 - 10 - 9 \\ 5 - 4 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2.5

$$\begin{cases} 15A + 10B = 63 \\ 25A + 17B = 106 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 25 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 106 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = Y$$

$$X^{-1} = \frac{1}{15 \cdot 17 - 10 \cdot 25} \begin{bmatrix} 17 & -10 \\ -25 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = X^{-1}Y = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 17 & -10 \\ -25 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 63 \\ 106 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.20 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ kr}$$

2.6 Storleksanalys: $(m \times n)(n \times n) = (m \times n)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{ix} & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} I_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{ix} & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{11} & \cdots & 0_{1n} \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0_{i1} & 1_{ix} & 0_{in} \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0_{n1} & \cdots & 1_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{ix} & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.7

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Rad 1 har bytt plats med rad 2.

Detta betyder att $E_{i,j}A$ är som matrisen A men rad i och rad j har bytt plats.

2.8

$$E \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Man kan tänka sig en matris som liknar I men där element (i, i) är bytt från 1 till k . En sådan matris kallas $E_i(k)$.

$$E_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & k & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Kapitel 3

3.1

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x T_A f(e_1) + y T_A f(e_2) \end{aligned}$$

$$T_A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.2

$$T_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ -3x + 6y \end{bmatrix} = \{t = x - 2y\} = \begin{bmatrix} t \\ -3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Det betyder att R^2 avbildas på $\begin{bmatrix} t \\ -3t \end{bmatrix}$. Där ingår till exempel inte $(0, 4)$.

3.4

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

3.5

$$f(0, 0) = 0 \cdot f(e_1) + 0 \cdot f(e_2) = 0 + 0 = 0$$

$$3.6 \text{ a) } f(x, y) = (x, 0) \Rightarrow T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ty } f(x, y) = T_A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Avbildningen avbildar alla punkter direkt ned (vinkelrätt) på x -axeln.

3.7 Låt vektorn (x, y) ha längden d och argumentet α . Då gäller $(x, y) = d(\cos \alpha, \sin \alpha)$. För den vinkeln θ transformerade vektorn gäller:

$$\begin{aligned} (\hat{x}, \hat{y}) &= d(\cos(\alpha + \theta), \sin(\alpha + \theta)) = \\ &= d(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta, \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) = \\ &= (d \cos \alpha \cos \theta - d \sin \alpha \sin \theta, d \sin \alpha \cos \theta + d \cos \alpha \sin \theta) = \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{dvs } A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$